panikzettel.htwr-aachen.de

Entscheidungslehre

Daniel Sous

Version 1 — 04.08.2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dies ist ein kurzer Überblick über die wichtigsten Formeln und Aussagen, die in der Vorlesung *Entscheidungslehre* [1] vorgestellt wurden. Die Zusammenfassung konzentriert sich vor allem auf Formeln und Rechnungen aus den Teilen B & C. Da es sich um eine Kurzzusammenfassung (aka Panikzettel) handelt, wird auf ausführliche Erklärungen und Herleitungen verzichtet.

Dieser Panikzettel ist Open Source. Wir freuen uns über Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge auf `https://git.rwth-aachen.de/philipp.schroer/panikzettel`.

2 Grundlagen

2.1 Bayes-Theorem

Mit dem Bayes-Theorem lassen sich bedingte Wahrscheinlichkeiten "umdrehen":
Mit

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad | \cdot P(B) \\ \Leftrightarrow \quad P(A|B) \cdot P(B) &= P(A \cap B) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad | \cdot P(A) \\ \Leftrightarrow \quad P(B|A) \cdot P(A) &= P(A \cap B) \end{aligned}$$

folgt

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Durch Umstellen folgt das **Bayes-Theorem**:

$$P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

2.2 Standardnormalverteilung

Transformation einer Normalverteilung[1] mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ (bzw. Varianz σ^2) in eine Standardnormalverteilung $N(0,1)$ mit $\mu = 0, \sigma = \sigma^2 = 1$:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$
$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \phi(z)$$

[1] Auf weitere Verteilungen wie die Binomialverteilung, Exponentialverteilung, etc. wird hier verzichtet, da diese nicht auswendig zu lernen sind. Der Umgang mit diesen sollte jedoch bekannt sein.

3 Präskriptive Entscheidungstheorie

3.1 Exponentielle Nutzenfunktion

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-c\frac{x - x^-}{x^+ - x^-}}}{1 - e^{-c}} & \text{für } c \neq 0 \\ \\ \dfrac{x - x^-}{x^+ - x^-} & \text{für } c = 0 \end{cases} \qquad \text{mit } c := -2\ln\left(\frac{1}{p} - 1\right)$$

Um p zu ermitteln muss der Entscheider zwischen folgendem sicheren Betrag und dem nebenstehenden Spiel indifferent[2] sein:

$$\frac{x^- + x^+}{2} \sim \begin{array}{l} \overset{p}{\nearrow}\; x^+ \\ \underset{1-p}{\searrow}\; x^- \end{array}$$

Es gilt außerdem

$$c \begin{cases} > 0 & \text{Risikoscheue} \\ = 0 & \text{Risikoneutralität} \\ < 0 & \text{Risikofreude} \end{cases}$$

3.2 Erwartungsnutzenmodell

Eine Alternative a wird durch $a := (p_1, a_1; \ldots; p_n, a_n)$ definiert, wobei p_i für die Wahrscheinlichkeit und a_i für die Ausprägung im Zustand $i \in \{1, \ldots, n\}$ steht. Für den Nutzen der Alternative a gilt nun

$$EU(a) := \sum_{i=1}^{n} (p_i \cdot u(a_i))$$

mit Nutzenfunktion $u(x)$. Es wird also der Erwartungswert über die Nutzenwerte gebildet.

3.3 Additive Nutzenfunktion bei Sicherheit

Bei Sicherheit lässt sich das additive Modell mit m Zielen und Alternativen $a = (a_1, \ldots, a_m)$ wie folgt definieren

$$u(a) := \sum_{r=1}^{m} w_r \cdot u_r(a_r) \qquad \text{mit } \sum_{r=1}^{m} w_r = 1 \text{ und } w_r > 0$$

3.4 Additive Nutzenfunktion bei Risiko

Sei a_{ij} die Ausprägung der Alternative a im i-ten Zustand und j-ten Ziel, sowie $p(s_i)$ die Wahrscheinlichkeit des Umweltzustands s_i, dann gilt:

$$EU(a) := \sum_{i=1}^{n} p(s_i) \cdot (w_1 u_1(a_{i1}) + \cdots + w_m u_m(a_{im}))$$

[2]Indifferenz zwischen A und B, notiert als $A \sim B$, heißt in diesem Zusammenhang, dass der Entscheider die Entscheidungsmöglichkeiten A und B als gleich gut bewertet.

Gewichte wie bei Additive Nutzenfunktion bei Sicherheit

3.5 Trade-Off Verfahren

Sind die Zielgewichte $w_1, \ldots, w_r$ mit $r \in \mathbb{N}$ gesucht und $r-1$ indifferente Präferenzen angegeben, kann das Trade-Off Verfahren angewendet werden, um die Gewichte zu bestimmen. Hier werden die indifferenten Präferenzen gleichgesetzt und nach einem beliebigen Gewicht umgeformt:

$$w_1 u_1(a_1) + \cdots + w_r u_r(a_r) = w_1 u_1(b_1) + \cdots + w_r u_r(b_r)$$

Für $r = 2$ ergibt sich zum Beispiel:

$$w_1 = \frac{u_2(a_2) - u_2(b_2)}{u_1(b_1) - u_1(a_1)} w_2$$

Da $w_1 + \cdots + w_r = 1$ gilt, lassen sich nun die absoluten Werte der Gewichte berechnen.

Hinweis: Falls das entstehende Gleichungssystem überbestimmt ist (d.h. es gibt mehr als $r-1$ indifferente Präferenzen), muss überprüft werden, ob eine gültige Lösung für alle Präferenzen besteht. Falls nicht, kann keine additive Nutzenfunktion verwendet werden.

3.6 Dominanz bei unvollständiger Information

- Bei gegebenen Intervallen $p_i^- \leq p(s_i) \leq p_i^+$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$:
  Falls $\min\left[p(s_1) \cdot (u(a) - u(b)) + \cdots + p(s_n) \cdot (u(a) - u(b))\right] \geq 0$ gilt, dominiert Alternative a Alternative b. Dabei sind die Wahrscheinlichkeiten $p(s_1), \ldots, p(s_n)$ jeweils aus dem gegebenen Intervall zu wählen, wobei $p(s_1) + \cdots + p(s_n) = 1$ gelten muss.
- Bei gegebener Rangfolge der Wahrscheinlichkeiten:
  Falls nur die Rangfolge der Wahrscheinlichkeiten ($p(s_1) \geq \cdots \geq p(s_n)$) gegeben ist, müssen folgende Punkte gelten, damit eine Dominanz vorliegt:
  1. Der Nutzen im wahrscheinlichsten Zustand muss höher sein als der aller anderen Alternativen.
  2. Im Durchschnitt muss der Nutzen der dominierenden Alternative am höchsten sein.
  3. Bei Kumulierung der Nutzenwerte nach absteigender Wahrscheinlichkeit muss die dominierende Alternative im Vergleich zur dominierten Alternative stets besser oder gleich gut sein.

4 Deskriptive Entscheidungstheorie

4.1 Verzerrungen in der Informationswahrnehmung [2]

- *Selektive Wahrnehmung:*
  Menschen beschränken ihre Wahrnehmung derart, dass Erwartungen eintreffen und eigene Entscheidungen als "richtig" erscheinen.
- *Kontrast-Effekte:*
  Informationen, die mit einer im Kontrast stehenden Information präsentiert werden, werden oft überhöht wahrgenommen.
- *Verfügbarkeitsheuristik:*
  Informationen, die im Kopf am leichtesten verfügbar sind, bestimmen das Entscheidungs- und Schätzverhalten, d.h. je verfügbarer ein Ereignis ist, desto größer ist seine subjektive Wahrscheinlichkeit. Hat man zum Beispiel vor kurzem von einem Flugzeugunglück erfahren, so würde man die Wahrscheinlichkeit, selbst Opfer eines solchen Unglücks zu werden, überschätzen.
- *Mentale Kontenführung:*
  Menschen neigen dazu, alle Projekte, an denen sie arbeiten, isoliert in einem zugehörigen "Mental Account" zu verbuchen, wobei gegenseitige Abhängigkeiten zwischen diesen vernachlässigt werden. So würde der Verlust einer Konzertkarte im Wert von 100€ anders bewertet als der Verlust von 100€ Bargeld, obwohl der objektive monetäre Verlust derselbe ist.
- *Verankerungsheuristik:*
  Personen werden bei Schätzungen von Wahrscheinlichkeiten von einem vorgegebenen Anker beeinflusst, wobei gegenseitige Anpassung unter Berücksichtigung weiterer Informationen zu gering ausfällt. (Siehe Wahrscheinlichkeitsgewichtefunktion)
- *Repräsentativitätsheuristik:*
  Neigung der Menschen, zu schnell in ein Schema-Denken zu verfallen und die Wahrscheinlichkeit von repräsentativen Ereignissen zu überschätzen.

4.2 Wertfunktion

Die Wertfunktion spiegelt den subjektiven Wert wieder, welcher für einen Gewinn ($x \geq 0$) oder einen Verlust ($x < 0$) wahrgenommen wird.

$$v(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0, \\ -\lambda\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Ein Commitment drückt sich in dem Parameter λ bei Verlusten aus (*Verlustaversion*). Dieser lässt Verluste für $\lambda > 1$ noch "schlimmer" wirken.

4.3 Wahrscheinlichkeitsgewichtefunktion

Menschen überschätzen geringe Wahrscheinlichkeiten und überbewerten die absolute Sicherheit. Die allgemeine Wahrscheinlichkeitsgewichtefunktion ist durch $\pi_{\delta,\gamma}(p)$ gegeben:

$$\pi_{\delta,\gamma}(p) := \frac{\delta \cdot p^{\gamma}}{\delta \cdot p^{\gamma} + (1-p)^{\gamma}}$$

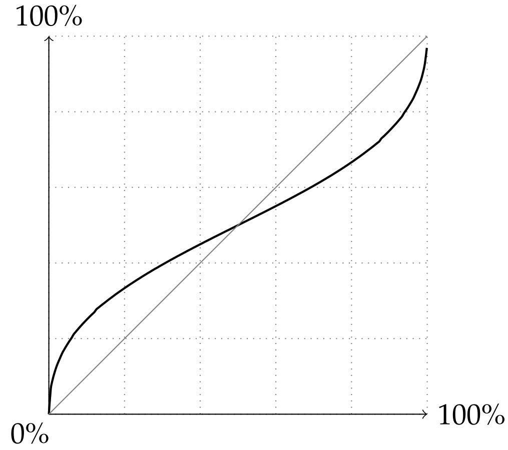

Abbildung 1: Graph der Funktion $\pi_{1,0.5}(p)$

4.4 Risikoeinstellung

Sei eine sichere Alternative A und ein Spiel B - mit Wahrscheinlichkeit p_1 einen Betrag b_1 und mit Wahrscheinlichkeit p_2 einen Betrag b_2 zu gewinnen - gegeben. Des Weiteren sei eine Wertfunktion $v(x)$ gegeben. Falls

$$v(A) = p_1 \cdot v(b_1) + p_2 \cdot v(b_2)$$

gilt, dann folgt

$$\begin{array}{ccll} A & \succ & B^{3} & \Rightarrow \text{risikoscheue Einstellung} \\ A & \sim & B & \Rightarrow \text{risikoneutrale Einstellung} \\ A & \prec & B & \Rightarrow \text{risikofreudige Einstellung} \end{array}$$

4.5 Risikoverhalten

Um den Begriff des *Risikoverhaltens* zu erläutern, muss zunächst der Begriff *Risikoprämie* definiert werden. Dazu sei ein Spiel mit dem Erwartungswert EW und ein alternatives Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}$ gegeben. Dann ist die Risikoprämie RP definiert als

$$RP := EW - S\ddot{A}.$$

Wird das gegebene Spiel und das Sicherheitsäquivalent als indifferent angesehen, so lässt sich das Risikoverhalten ableiten:

$$RP \begin{cases} > & 0 \quad \text{Entscheider verhält sich risikoscheu} \\ = & 0 \quad \text{Entscheider verhält sich risikoneutral} \\ < & 0 \quad \text{Entscheider verhält sich risikfreudig} \end{cases}$$

Das Risikoverhalten ist das beobachtbare Verhalten in Risikosituationen. Es bildet das Resultat aus Höhenpräferenzen und Risikoeinstellung.

[3] $A \succ B$ steht dafür, dass Alternative A gegenüber Alternative B bevorzugt wird.

4.6 Discounted-Utility-Modell

Der heutige Wert eines zukünftigen Ereignisses wird durch Abdiskontierung seines späteren Nutzens auf den heutigen Zeitpunkt abgebildet:

$$
\begin{aligned}
DU(a) &:= \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{t} u_t(a_t) \\
&= \sum_{t=0}^{T} e^{-t\cdot\ln(1+i)} u_t(a_t)
\end{aligned}
$$

Wobei

$$
\begin{aligned}
u_t(a_t) &= \text{Nutzen des Ergebnisses } a_t \text{ im Zeitpunkt } t \\
i &= \text{Diskontrate}
\end{aligned}
$$

Das Discounted-Utility-Modell ist allerdings ein Modell was sich nur für präskriptive Zwecke eignet, da man hier exponentiell diskontiert (konstante Abnahme der Sensitivität). Dies ist allerdings in der deskriptiven Entscheidungstheorie unrealistisch, weshalb man das Hyperbolic-Discounted-Utility-Modell verwendet.

4.7 Hyperbolic-Discounted-Utility-Modell

Das Hyperbolic-Discounted-Utility-Modell bildet die Sensitivität der Menschen insofern besser ab, dass die Sensitivität zu Beginn stark fällt und dann abflacht.

$$
\begin{aligned}
HDU(a) &:= \sum_{t=0}^{T} \delta^{\text{hyp}}(t) u_t(a_t) \\
&= \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+\alpha t}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} u_t(a_t)
\end{aligned}
$$

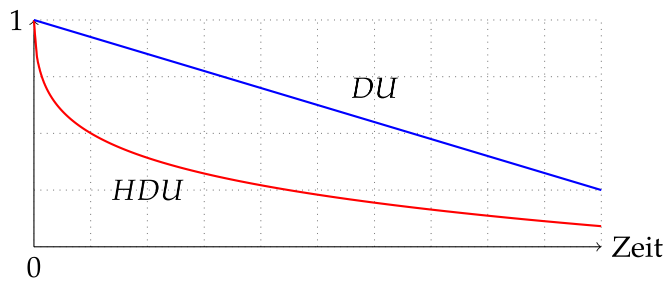

Abbildung 2: Skizze zu Discounted-Utility-Modell und Hyperbolic-Discounted-Utility-Modell

5 Wege zu einem besseren Entscheiden

5.1 Anwendungsfelder der Entscheidungslehre [2]

1. Verbesserung der Entscheidungsqualität
2. Beeinflussung des Verhaltens Dritter zum eigenen Nutzen
3. Beeinflussung des Verhaltens Dritter zu deren Nutzen oder zum Nutzen der Gesellschaft (Nudging)
4. Beeinflussung des eigenen Verhaltens (Selbstlenkung)
5. Veränderung der Wahrnehmung zur Zufriedenheitssteigerung (Hedonic Framing)
6. Erlangen eines eigenen Profits aus der Verhaltensprognose anderer

5.2 Entscheidungen im Team

Um eine Entscheidung im Team treffen zu können, müssen zunächst die jeweiligen Stakeholder (Personen die ein begründetes Interesse an dem Projekt haben) identifiziert und eingeordnet werden. Dabei muss zwischen den folgenden zwei Aspekten unterschieden werden:

- Relative Gewichtung der Ziele des Stakeholders im Verhältnis zu eigenen:
  Hier sollte man sich die Frage stellen, ob derjenige Stakeholder die gleichen Ziele verfolgt und sich damit für das Projekt engagieren wird.
- Ausmaß der instrumentellen Bedeutung des Stakeholders für die eigenen Ziele:
  Hier geht es darum, wie viel Einfluss der jeweilige Stakeholder auf die Entscheidung hat. "Könnte der Stakeholder das Projekt stoppen, wenn er sich nicht einbezogen genug fühlt?"

Die Auswertung dieser beiden Aspekte kann nun in einem Netzdiagramm dargestellt werden.

5.3 Analytisches Vorgehen [2]

Sowohl für Individual- als auch für Gruppenentscheidungen sollten die folgenden fünf Schritte für ein analytisches Vorgehen berücksichtigt werden:

(Z) Festlegung des Zielkatalogs
(A) Alternativensuche
(EF) Identifikation der unsicheren Einflussfaktoren
(P) Umwelt- und Wirkungsprognosen
(B) Analytische Bewertung

5.4 Entscheidungsnavi

In der Vergangenheit wurden in der Klausur bereits öfters Fragen zum Entscheidungsnavi und dessen Struktur gestellt. Unter anderem wurde dort häufig nach den 8 Menüpunkten des Entscheidungsnavis (Stand: 03.02.2019) gefragt:

1. Entscheidungsfrage
2. Ziele
3. Alternativen
4. Unsicherheitsfaktoren
5. Wirkungsprognosen
6. Nutzenfunktion
7. Zielgewichte
8. Auswertung

Literatur

[1] R. von Nitzsch, *Entscheidungslehre : Wie Menschen entscheiden und wie sie entscheiden sollten*. Aachen: Mainz, 2017. [Online]. Available: http://d-nb.info/1060414678

[2] R. von Nitzsch, S. Schiffer, and P. von Thunen, *Übungen zur Entscheidungslehre : Übungsaufgaben und alte Klausuraufgaben mit Musterlösungen, Fallstudien, Fachbegriffe; 8. überarbeitete. [Aufl.]*. Aachen: Mainz, 2017. [Online]. Available: http://publications.rwth-aachen.de/record/211553